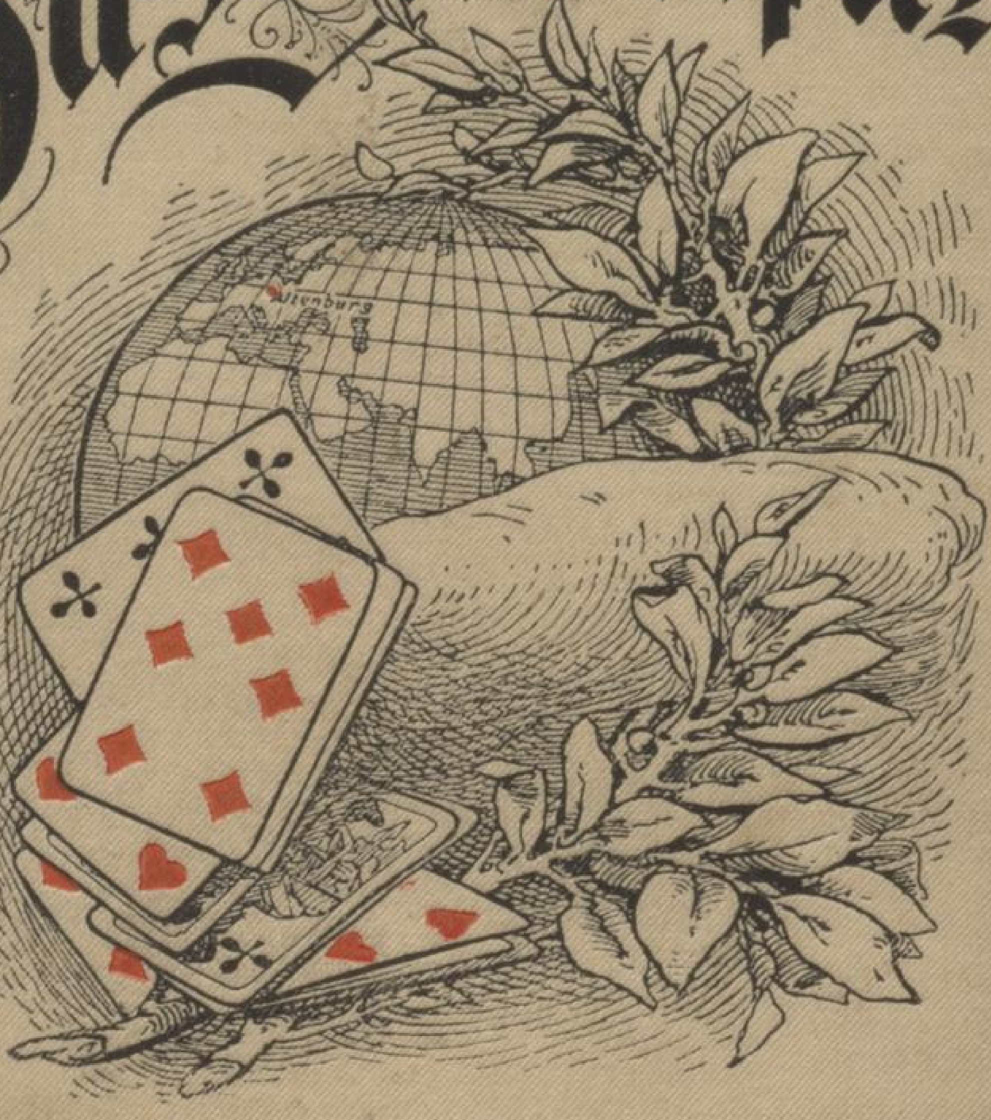
Das Skatspiel



im Lichte der

Wahrscheinlichkeitsrechnung

von

Dr. Schubert.

J. F. Richter in Hamburg.

bis 27.12.56.

Das Skatspiel.

Das Skatspiel

im Lichte

der

Wahrscheinlichkeitsrechnung

von

[ermann]

Dr. H. Schubert,

Oberlehrer an der Gelehrtenschule zu Hamburg,

Mitglied der Leop. Academie und der Soc. Mathém. de France.

Motto:

Die Zahl ist das Wesen der Dinge.

Pythagoras.

Hamburg.

Verlag von J. F. Richter.

1887.

Inhalts-Verzeichniß.

Abschnitt I.

Ziel und Methode.

Abschnitt II.

Die Verteilung der 32 Karten unter die drei Spieler und den Skat.

Abschnitt III.

Die Verteilung der 22 Karten, die Jemand nicht erhalten hat, unter die beiden übrigen Spieler und den Skat.

Abschnitt I.

Ziel und Methode.

§ 1.

Begriff der Wahrscheinlichkeit.

Wenn Jemand ein Thalerstück zufällig fallen läßt, so ist im allgemeinen kein Grund vorhanden, warum die Bildseite leichter oder schwerer nach oben zu liegen kommt, als die Wappenseite. Wenn er also das Thalerstück sehr oft fallen läßt, so wird etwa die Hälfte der Male die Bildseite nach oben fallen. Dazu kommt noch, daß der Bruch, in dessen Nenner die Zahl steht, welche angiebt, wie oft das Thalerstück überhaupt fällt, und in dessen Zähler die Zahl steht, welche angiebt, wie oft seine Bildseite dabei nach oben fällt, sich um so mehr dem Bruche $\frac{1}{2}$ nähert, je öfter das Experiment wiederholt wird. Man sagt deshalb, der Bruch $\frac{1}{2}$ oder 50 Prozent drücke die „Wahrscheinlichkeit“ aus, daß ein zufällig fallender Thaler die Bildseite zeigt. Wirft man statt des Thalerstücks einen Würfel, so wird jede der sechs Flächen des Würfels ein gleiches Recht haben, nach oben zu fallen. Hieraus folgt, daß die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine bestimmte Zahl, etwa die Vier, zu würfeln, $\frac{1}{6}$ oder $16\frac{2}{3}$ Prozent beträgt, weil unter sechs gleich *möglichen* Fällen nur ein Fall günstig, oder, wie man sagt, nur ein *Treffer* ist. Freilich kann ich von dem Zufall nicht verlangen, daß, wenn ich nur sechsmal würfele, ich gerade einmal die Vier werfe. Wohl aber wird bei etwa 600maligem Würfeln die Zahl der Male, wo die Vier fällt, sich verhältnismäßig wenig von 100 unterscheiden. Ja, ich muß sogar, wenn die Zahlen, die angeben, wie oft bei 600maligem Würfeln jede Zahl gewürfelt ist, erheblich von dem Werthe 100 abweichen, mit Recht die Ueberzeugung gewinnen, daß ein bestimmter Grund für diese Abweichung vorliegt, indem vielleicht die der Sechs zugewendete innere Hälfte des Würfels mit schwerem Metall gefüllt ist. Umgekehrt kann man aus zahlreichen Wiederholungen eines und desselben Experimentes *statistisch* die Wahrscheinlichkeitsbrüche näherungsweise ableiten. So ist es, falls mit einem richtigen Würfel 600mal gewürfelt wird, fast gewiß, daß die Vier nicht seltener als 90mal und nicht öfter als 110mal fällt. Deshalb führt auch das Experiment immer zu dem richtigen Wahrscheinlichkeitsbruche oder doch zu einem Bruche, der sich von dem richtigem Bruche nur wenig und um so weniger unterscheidet, je öfter das Experiment ausgeführt ist. (Gesetz der großen Zahlen.) Freilich hat man es nicht nöthig, sein Urtheil über die Chancen, die man hat, mit einem Würfel die Vier zu werfen, auf die experimentelle Beobachtung zu gründen, da man von vornherein weiß, daß unter 6 gleich möglichen Fällen 1 Treffer ist, also der gesuchte Bruch $\frac{1}{6}$ sein muß. Wenn uns aber die Wirkungsstärke der verschiedenen Ursachen, welche ein Ereignis hervorrufen, nicht ausreichend bekannt ist, so sind wir gezwungen, die Wahrscheinlichkeit, daß ein solches Ereignis eintritt, aus der Erfahrung abzuleiten. Dies thut namentlich die Assekuranz-Wissenschaft, indem sie der Statistik z. B. die Thatsache entnimmt, daß von 100 Geborenen 64 noch im Alter von 20 Jahren, 40 noch im Alter von 55 Jahren leben und demgemäß bei der Berechnung der Lebensversicherungsbeiträge in Rechnung zieht, daß ein zwanzigjähriger Mensch mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{40}{64}$ oder $\frac{5}{8}$ oder 62,5 Prozent das 55. Jahr erreicht. Bei den Kartenspielen sind wir nun aber, ebenso wie beim Würfeln, in der glücklichen Lage, die auf die Verteilung der Karten bezüglichen Wahrscheinlichkeitsbrüche auch ohne Experimente von vornherein berechnen zu können, weil wir die Voraussetzung machen dürfen, daß bei beliebigem Aussondern von Karten keine Karte vor einer andern bevorzugt ist. Handelt es sich z. B. darum, aus einem Spiel von 32 Skatkarten eine Karte zu ziehen, die ein Eicheln* ist (Eichel-Wenzel als Eicheln gerechnet), so werden wir sagen, daß 32 gleich mögliche Fälle da sind, unter denen sich 8 Treffer befinden, weil 8 Eicheln im Spiel sind, und daraus schließen, daß die Wahrscheinlichkeit, eine Karte zu ziehen, die Eicheln ist, $\frac{8}{32}$ oder $\frac{1}{4}$ oder 25 Prozent beträgt. Aehnlich ergiebt sich für die Wahrscheinlichkeit, aus 32 Karten:

den ältesten Wenzel zu ziehen:

$\frac{1}{32}$ oder 3,1 Prozent,

ein Daus zu ziehen:

$\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ oder 12,5 Prozent,

einen Wenzel, ein Daus oder eine Zehn zu ziehen:

$\frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ oder 37,5 Prozent.

Da eine derartige Aussonderung einer Karte aus allen 32 Karten beim Skatspiel nicht vorkommt und es sich in diesem Büchelchen um die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das Skatspiel handelt, so fügen wir noch ein dem wirklichen Skatspiel entnommenes Beispiel hinzu. Ein Skatspieler möge in seinen zehn Karten den Schellen-Wenzel, aber kein sonstiges Schellen und auch keinen sonstigen Wenzel finden. Da seine Karte in den übrigen drei Farben gut ist, so glaubt er, ein Tourné gewinnen zu müssen, falls er nicht

* Eicheln = Eckern = Treff, Grün = Pik, Rot = Herzen = Coeur, Schellen = Karo; Daus = Aß, Ober = Dame, Wenzel = Bube.

gerade Schellen tourniert. Er überlegt sich daher seine Chancen für und gegen das Tournieren von Schellen in folgender Weise. Unter den 22 Karten, die er nicht in der Hand hat und von denen jede mit gleichem Rechte die zu tournierende Karte sein könnte, müssen sich 7 Schellen und 15 Karten befinden, die nicht Schellen sind. Demnach hat der Spieler mit $\frac{7}{22}$ oder 31,8 Prozent Wahrscheinlichkeit Schellen und mit $\frac{15}{22}$ oder 68,2 Prozent eine andere Karte zu erwarten. Er darf also darüber, daß er nicht Schellen tourniert, nur gerade so sicher sein, wie er über eine Sache ist, die er mit einer Wette von 68,2 gegen 31,8, d. h. von etwa 15 gegen 7 zu vertreten geneigt ist. Derartige einfache Ueberlegungen macht man im Skatspiel mit bewußter oder unbewußter Abschätzung der Chancen sehr häufig. Da jedoch in seltenen Fällen die Berechnung der Wahrscheinlichkeitsbrüche so leicht ist, wie in dem obigen einfachen Beispiele, so ist der Skatspieler meist darauf angewiesen, sein Urteil darüber, wieviel leichter das eine als das andere eintreffen wird, auf langjährige Erfahrung und Uebung zu stützen. Er thut dann im wesentlichen dasselbe, was derjenige thut, der, wie oben erörtert ist, die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel die Vier zu werfen, praktisch findet, indem er 600mal würfelt und dabei erkennt, daß nahezu 100mal die Vier fällt. Da nun aber die beim Skatspiel auftretenden Wahrscheinlichkeitsbrüche mathematisch genau berechenbar sind, so hat der Verfasser die wichtigsten unter ihnen berechnet und in den folgenden Abschnitten zusammengestellt, in der Ueberzeugung, daß dieselben manchem Skatspieler interessant und vielleicht auch wertvoll sein werden, teils, weil diese Brüche ihm seine auf Erfahrung beruhende Chancen-Schätzung ziffermäßig bestätigen können, teils, weil dieselben ihm vielleicht einen Fingerzeig dafür geben können, in welcher Richtung er sein auf Erinnerungen beruhendes, subjektives und deshalb vielleicht unrichtiges Urteil zu modifizieren hat. Das lediglich auf Erfahrung beruhende Urteil kann nämlich dadurch getrübt sein, daß man die Fälle, in denen das Günstige eintritt, leichter oder schwerer im Gedächtnis behalten hat, als die Fälle, in denen das Ungünstige eintritt. Die Erinnerungen können trügen, die richtig berechneten Zahlen aber nicht. Beispielsweise haben alle geübten Skatspieler, die ich bis jetzt gefragt habe, die Wahrscheinlichkeit, im Skat einen Wenzel zu finden, falls man selbst keinen hat, viel niedriger geschätzt, als sie wirklich ist. Sie beträgt nämlich etwa $\frac{1}{3}$. Und in der That, wenn man sich nicht auf sein Gedächtnis verläßt, sondern die günstigen und ungünstigen Fälle hinreichend lange gewissenhaft notiert, so wird man finden, daß, falls man selbst keinen Wenzel hat, durchschnittlich einmal unter drei Malen einer im Skat liegt.

§ 2.

Die Kombinationszahlen.

Bei der Berechnung der meisten für das Skatspiel wichtigen Wahrscheinlichkeitsbrüche ist die Anzahl der möglichen Fälle und auch die Anzahl der Treffer so groß, daß man darauf verzichten muß, dieselben durch bloßes Abzählen zu finden. Wohl aber kann man diese Anzahlen oder, worauf es allein ankommt, ihr Verhältnis genau bestimmen, sobald man eine gewisse Regel aus der mathematischen Kombinatorik benutzt. Da auf der Anwendung dieser Regel alle folgenden Berechnungen beruhen, so will ich dieselbe hier, wenn auch nicht mathemathisch beweisen*, so doch an einigen Beispielen auseinandersetzen. Es handele sich darum, aus 32 Karten 2 beliebig herauszugreifen. Eine bestimmte von diesen 32 Karten kann mit jeder der übrigen 31 Karten zu einem Paar zusammentreten, also 31 Paaren angehören. Demnach würden alle 32 Karten 32 mal 31 Paare bilden. Dabei ist aber dann jedes Paar doppelt gezählt, nämlich als von der einen und als von der andern Karte herrührend. Also ist von 32 mal 31 die Hälfte zu nehmen, d. h. $\frac{32 \cdot 31}{2} = 16 \cdot 31 = 496$

* Den allgemeinen Beweis findet man in jedem ausführlicheren Arithmethikbuch, z. B. in § 41 meiner Sammlung von arithmetischen und algebraischen Aufgaben, zweites Heft, Potsdam, 1883. Dieses Buch enthält auch in § 42 eine große Fülle von Wahrscheinlichkeits-Aufgaben.

die Zahl, welche angiebt, auf wievielfache Weise man aus 32 Karten irgendwelche zwei aussondern kann. Um die Entstehung dieser Zahl anzudeuten, bezeichnen wir sie mit 32_2. In ähnlicher Weise kann man erkennen, daß die Zahl $\frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ ($= 32 \cdot 31 \cdot 5 = 4960$), wofür wir kürzer 32_3 schreiben, angiebt, auf wievielfache Weise sich aus 32 Karten eine Gruppe von dreien aussondern läßt. Ebenso liefert die Ausrechnung von 32_{10}, d. h. von

$$\frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}$$

die Zahl, welche angiebt, auf wievielfache Weise sich aus 32 Karten eine Gruppe von irgend welchen zehn herausgreifen läßt. Nachdem man die Faktoren des Nenners gegen die Faktoren des Zählers gehoben hat, erhält man durch Multiplikation der im Zähler stehen gebliebenen Faktoren 64 512 240. Ein Skatspieler kann also über $64\frac{1}{2}$ Million verschiedene Gruppen von je zehn Karten in die Hand bekommen, wobei freilich zwei Gruppen schon als verschieden gelten, wenn sie auch nur in einer einzigen Karte von einander abweichen. Hat man statt 32 eine andere Zahl, etwa 22, so findet man in ähnlicher Weise:

$$22_1 = \frac{22}{1} = 22,\ 22_2 = \frac{22 \cdot 21}{1 \cdot 2} = 231,\ 22_3 = \frac{22 \cdot 21 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1540,$$

 11·19·17·14·13

$$22_{10} = \frac{22.21.20.19.18.17.16.15.14.13}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10} = 646646$$

als die Zahlen, welche angeben, auf wievielfache Weise sich aus 22 Karten eine Gruppe von 1, 2, 3, 10 Karten aussondern läßt. In der Mathematik ist es gebräuchlich, das Resultat der Multiplikation aller natürlichen Zahlen von 1 an bis zu einer bestimmten Zahl dadurch abgekürzt zu bezeichnen, daß man diese Zahl mit einem nachgesetzten Ausrufungszeichen versieht. So bedeutet:

3! die Zahl $1.2.3 = 6$,

7! die Zahl $1.2.3.4.5.6.7 = 5040$,

10! die Zahl $1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 = 3628800$.

Mit Benutzung dieser Abkürzung kann man z. B. die Kombinationszahlen 4_2, 6_4, 32_3, 22_{10} auch kurz so schreiben:

$$4_2 = \frac{4!}{2!\,2!},\ 6_4 = \frac{6!}{4!\,2!},\ 32_3 = \frac{32!}{3!\,29!},\ 22_{10} = \frac{22!}{10!\,12!}$$

Bei den in den folgenden Abschnitten mitgeteilten Wahrscheinlichkeitsbrüchen habe ich immer die Art ihrer Berechnung durch Angabe der zu multiplizierenden Kombinationszahlen angedeutet, mit Rücksicht auf diejenigen Leser, welche die Resultate nicht blos kennen lernen, sondern auch auf ihre Richtigkeit hin prüfen wollen, oder welche an ihnen einen Anhalt haben wollen, um theoretische Fragen des Skatspiels, die hier noch nicht behandelt sind, selbstständig erledigen zu können.

Abschnitt II.

Die Verteilung der 32 Karten unter die drei Spieler und den Skat.

§ 3.

Gesammtzahl aller möglichen Skatspiele.

Die in Zeitungen und Unterhaltungs-Journalen häufig mitgetheilte Anzahl aller denkbaren Skatspiele, oder, wie man genauer sagen müßte, die Anzahl aller möglichen Verteilungsarten der 32 Karten des Skatspiels unter die drei Spieler und den Skat ergiebt sich nach der in § 2 besprochenen Methode der Berechnung der Kombinationszahlen aus $32_{10} \cdot 22_{10} \cdot 12_{10}$, oder, was dasselbe ist, aus $\frac{32!}{10!\ 10!\ 10!\ 2!}$ und man findet genau

2753 294 408 504 640,

also über 2753 Millionen mal Millionen für die gesuchte Anzahl. Da der Mensch an die Vorstellung einer derartig großen Zahl nicht gewöhnt ist, so muß er versuchen, durch Beispiele sich eine Vorstellung von ihr zu verschaffen. Nehmen wir an, daß drei Menschen auf Speis' und Trank, auf Erholung und Schlaf verzichten könnten, um sich der edlen Aufgabe zu unterziehen, alle möglichen Skatspiele durchzuspielen, und daß dieselben dabei durchschnittlich nur 5 Minuten für ein Spiel brauchten, so würden sie doch über 15 733 Millionen Jahre spielen müssen, ehe sie die letzte Runde ansagen dürften. Da also drei menschliche Leben leider nicht ausreichen, um alle Verteilungsarten beim Skatspiel durchzuspielen, so wollen wir, dem Grundsatze unitis viribus huldigend, annehmen, daß alle Einwohner des Landes Sachsen-Altenburg sich zu Dreien vereinigten, um die gewaltige Aufgabe zu erledigen. Vergebliches Müh'n! Auch diese wackern Skatspieler würden, selbst wenn sie so rasend schnell spielten, daß sie in jeder Minute ein Spiel machten, über hunderttausend Jahre daran arbeiten müssen. Nun, so lassen wir denn die ganze jetzt lebende Menschheit, Jung und Alt, Mann und Weib, im ganzen, wie man annimmt, 1500 Millionen Individuen, in Gruppen von je Dreien, zum fröhlichen Skatspiel sich zusammensetzen. Wenn wir ihnen dann 12 Stunden Erholungszeit täglich gönnten, so daß sie nur 12 Stunden täglich zu spielen hätten, und wenn wir sie in der Stunde 20 Spiele erledigen ließen, so würde die Menschheit ihre große Kultur-Aufgabe, alle denkbaren Verteilungsarten des Skatspiels durchgespielt zu haben, in 62 bis 63 Jahren gelöst haben. Oder, nehmen wir an, daß jetzt beim ersten deutschen Skat-Kongreß das ganze Land Sachsen-Altenburg abgeholzt und planiert würde, um mit Skattischen so eng besetzt zu werden, daß auf je 2 Quadratmeter ein Skattisch käme, und daß an jedem solchen Tisch täglich 240 Spiele gespielt würden, so würde es vom Sommer 1886 an bis in's Jahr 1934 hinein dauern, ehe das Geburtsland des Skats mit Stolz ausrufen dürfte: „Jede mögliche Karten-Verteilung ist hier durchgespielt."

§ 4.

Das Liegen im Skat.

Unter allen überhaupt möglichen Verteilungsarten, deren Anzahl $32_{10} \cdot 22_{10} \cdot 12_{10}$ in § 3 besprochen ist, giebt es soviele, wo zwei Wenzel im Skat liegen, wie die Zahl $4_2 \cdot 30_{10} \cdot 20_{10}$ angiebt, d. h. über 31 Millionen mal Millionen. Weder von dieser Zahl noch von der Zahl aller überhaupt möglichen Spiele haben wir eine genaue Vorstellung. Wohl aber giebt uns das Verhältnis beider Zahlen, oder, was dasselbe ist, die

Wahrscheinlichkeit dafür, daß zwei Wenzel im Skat liegen, eine Anschauung davon, wie häufig es durchschnittlich vorkommt. Man findet für dieses Verhältnis $\frac{4_2 \cdot 30_{10} \cdot 20_{10}}{32_{10} \cdot 22_{10} \cdot 12_{10}}$ oder $\frac{4!\ 30!\ 10!\ 10!\ 10!\ 2!}{2!\ 2!\ 10!\ 10!\ 10!\ 32!}$ oder $\frac{4!\ 30!}{2!\ 32!} = \frac{4 \cdot 3}{32 \cdot 31}$ oder $\frac{3}{248}$, d. h. $\frac{300}{248}$ oder 1,2 Proz. Kürzer gelangt man zu dieser Zahl durch die Ueberlegung, daß unter 32_2 denkbaren Gruppen von 2 Skatkarten 4_2 Treffer sind, weil es 4 Wenzel giebt, und daß also $\frac{4_2}{32_2}$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist. Es kommt also nur in 1,2 Prozent aller Spiele vor, daß 2 Wenzel im Skat liegen. In ähnlicher Weise erhält man für die Wahrscheinlichkeit, daß nur 1 Wenzel im Skat liegt, da 28 Nicht-Wenzel im Spiele sind,

$$\frac{4_1 \cdot 28_1}{32_2} \text{ oder } \frac{7}{31}, \text{ d. h. } \frac{700}{31} \text{ oder } 22{,}6 \text{ Prozent.}$$

Daher ist die Summe von 1,2 und 22,6 oder 23,8 Proz. die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens ein Wenzel im Skat liegt. Um die Wahrscheinlichkeit zu finden, daß kein Wenzel im Skat liegt, hat man zu beachten, daß von 28 Karten irgend welche zwei liegen müssen, und erhält demgemäß $\frac{28_2}{32_2}$ oder $\frac{189}{248}$, d. h. $\frac{18900}{248}$ oder 76,2 Prozent. Die Thatsache, daß 23,8 und 76,2 zusammen 100 geben, liefert eine Kontrole der Berechnung. Die Zahl der Spiele, bei denen kein Wenzel liegt, ist also etwas mehr als dreimal so groß, als die Zahl der Spiele, bei denen mindestens ein Wenzel liegt.

Was eben für die vier Wenzel erörtert ist, gilt natürlich auch für je vier zusammengehörige Karten, also z. B. auch für die vier Däuser oder für die vier Zehnen.

Um die Häufigkeit der Spiele zu finden, wo von den 8 Karten, die sich aus den 4 Wenzeln und den 4 Däusern zusammensetzen, mindestens eine im Skat liegt, berechnet man am kürzesten die Wahrscheinlichkeit, daß von den 24 Karten, die nicht Wenzel und nicht Däuser sind, zwei liegen, und zieht den erhaltenen Bruch von 1 (bezw. von 100%) ab. So ergiebt sich $1 - \frac{24_2}{32_2} = 1 - \frac{24 \cdot 23}{32 \cdot 31} = \frac{55}{124}$ oder 44,4 Prozent. Aehnlich ergiebt sich aus $1 - \frac{20_2}{32_2} = \frac{153}{248}$, daß in 61,7 Prozent aller Spiele zwei Karten im Skat liegen, von denen mindestens eine Wenzel, Daus oder Zehn ist.

Wissenswerth dürfte auch der Prozentsatz der Spiele sein, wo 2 Karten von gleicher Farbe im Skat liegen. Rechnet man die Wenzel mit zu den Farben, so ergiebt sich dafür $\frac{4 \cdot 8_2}{32_2} = \frac{7}{31}$, d. h. 22,6 Prozent, so daß in 77,4 Prozent aller Spiele die im Skat liegenden Karten verschiedenen Farben angehören. Rechnet man aber die Wenzel nicht mit zu den Farben, so ergiebt sich aus $\frac{4 \cdot 7_2}{32_2} = \frac{21}{124}$, daß in 16,9 Prozent aller Spiele die beiden Skatarten gleichfarbig sind, und aus $\frac{6 \cdot 7_1 \cdot 7_1}{32_2} = \frac{147}{248}$, daß in 59,3 Prozent zwei Karten verschiedener Farbe im Skat liegen. Die Summe der beiden eben bestimmten Prozentzahlen ergiebt die schon oben gefundene Prozentzahl 76,2 für diejenigen Spiele, wo kein Wenzel liegt.

§ 5.

Wenzel oder überhaupt Karten gleichen Wertes in einer Hand.

Ein Skatspieler kann unter den zehn Karten, die er in die Hand bekommt, 4, 3, 2, 1 oder gar keinen Wenzel vorfinden. Dem entsprechend sind hier im ganzen fünf Fragen möglich. Dieselben sind in der folgenden Tabelle erledigt, wo auch die Berechnungsart angedeutet ist, und wo die gesuchten Wahrscheinlichkeiten sowohl in genauen Brüchen wie in abgerundeten Prozentzahlen angegeben sind.

Hiernach bekommt man also in 42,8 Prozent aller Spiele, d. h. etwa unter sieben Malen immer drei Mal einen und nur einen Wenzel in die Hand, und zwar

A. Tabelle der Wenzel in einer Hand.

	Berechnungsart			Wahrscheinlichkeit in Prozenten
4 Wenzel..	$\frac{4_4 \cdot 28_6}{32_{10}}$	$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29}$	$= \frac{21}{3596}$	0,6
3 Wenzel..	$\frac{4_3 \cdot 28_7}{32_{10}}$	$= \frac{4 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 22}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29}$	$= \frac{66}{899}$	7,3
2 Wenzel..	$\frac{4_2 \cdot 28_8}{32_{10}}$	$= \frac{6 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 22 \cdot 21}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29}$	$= \frac{2079}{7192}$	28,9
1 Wenzel..	$\frac{4_1 \cdot 28_9}{32_{10}}$	$= \frac{4 \cdot 10 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29}$	$= \frac{385}{899}$	42,8
keinen W...	$\frac{28_{10}}{32_{10}}$	$= \frac{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29}$	$= \frac{1463}{7192}$	20,3

mehr als das Doppelte so oft, als man keinen bekommt. Ferner erhält man, wie aus der Zahl 20,3 hervorgeht, durchschnittlich viermal so oft mindestens einen Wenzel, als man gar keinen erhält. Dies möge man denjenigen Spielern entgegenhalten, welche andauernd kein Spiel machen und dies dadurch zu erklären suchen, daß sie sagen, sie bekämen zu selten Wenzel in die Hand. Sehr gering ist nach unserer Tabelle der Prozentsatz der Spiele, in denen ein und derselbe Spieler alle 4 Wenzel bekommt, nämlich nur 0,6. Die Erfahrung scheint dafür zu sprechen, daß der Fall etwas öfter eintritt. Es kann dies dann nur dadurch erklärt werden, daß beim Skatspiel sehr häufig die Wenzel zusammenfallen, und daß deshalb bei nicht ausreichendem Mischen der Karten die Wenzel auch leicht zusammenbleiben und dadurch leichter in eine und dieselbe Hand kommen können.

Was die obige Tabelle über die vier Wenzel ausspricht, gilt natürlich auch für irgendwelche vier Karten gleichen Werthes, beispielsweise für die vier Däuser.

§ 6.

Matadore in einer Hand.

Wir müssen hier zwei Fälle unterscheiden, ob nämlich die Bestimmung, wieviel Matadore man hat, mit oder ohne Berücksichtigung der beiden Skatkarten geschehen soll, d. h. blos aus den zehn Karten der Hand oder aus den zwölf Karten, welche sich aus diesen und den Karten des Skats zusammensetzen. Der erste Fall bezieht sich auf die Matadore, mit denen Jemand, ohne den Skat gesehen zu haben, zu spielen meint, der zweite Fall bezieht sich auf die Matadore, mit denen Jemand wirklich spielt, wenn er das Spiel übernimmt. Die Prozentzahlen sind in der nebenstehenden Tabelle für beide Fälle angegeben, der Weg der Berechnung aber nur für den ersten Fall.

Aus den Prozentzahlen dieser Tabelle kann man u. a. folgende Schlüsse ziehen. Man kann in 44,4 bezw. 48,4 Prozent, also fast in der Hälfte aller Spiele mit oder ohne einen spielen; man kann ebenso oft mit einem wie ohne einen spielen; hinsichtlich der Häufigkeit stehen die Spiele mit oder ohne einen obenan, dann kommen die Spiele ohne 4 oder mehr Matadore, dann die ohne zwei, dann erst die ohne drei, dann die Spiele mit 2, mit 3, mit 4 Matadoren. Hierbei vergesse man aber nicht, daß sich die obigen Zahlen nur auf die Matadore beziehen, mit denen ein bestimmter Spieler jedesmal spielen könnte. Natürlich wird er Spiele ohne drei oder vier seltener wirklich übernehmen, als solche mit drei oder vier Matadoren. Die Fälle, wo Jemandes Karten so beschaffen sind, daß er mit oder ohne vier und mehr Matadore spielen könnte, sind in der obigen Tabelle nicht einzeln unterschieden, da sie verhältnismäßig selten vorkommen. Nur der seltenste von diesen Fällen

B. Tabelle der Matadore.

Jemand kann spielen	Ohne Rücksicht auf die 2 Skatkarten. Zu dem Nenner 32_{10} gehört als Zähler	Wahrscheinlichkeit	Prozent	Prozent bei Rücksicht auf die beiden Skatkarten
a) mit 4 oder mehr Mat.	28_6	$\frac{21}{3596}$	0,6	1,4
b) mit 3 Matadoren ...	28_7	$\frac{33}{1798}$	1,8	3,1
c) mit 2 Matadoren ...	$28_8 + 28_7$	$\frac{33}{496}$	6,7	8,9
d) mit 1 Matador	$28_9 + 2 . 28_8 + 28_7$	$\frac{55}{248}$	22,2	24,2
e) ohne 1 Matador	$28_9 + 2 . 28_8 + 28_7$	$\frac{55}{248}$	22,2	24,2
f) ohne 2 Matadore ...	$28_9 + 28_8$	$\frac{77}{496}$	15,5	15,3
g) ohne 3 Matadore ...	28_9	$\frac{385}{3596}$	10,7	9,5
h) ohne 4 od. mehr Mat.	28_{10}	$\frac{1463}{1792}$	20,3	13,5

sei hervorgehoben, daß ein Spieler nämlich das Glück hat, eine Farbe mit 11 Matadoren spielen zu können. Dieses Glück wird er durchschnittlich unter 2688010 Spielen nur einmal genießen.

§ 7.

Verteilung der Wenzel oder überhaupt von vier Karten gleichen Wertes unter alle Spieler.

Um die Verteilungsart von irgend vier Karten gleicher Bedeutung, also z. B. der vier Wenzel, unter alle drei Spieler und den Skat übersichtlich darstellen zu können, führen wir eine Bezeichnungsweise ein, die aus den folgenden beiden Beispielen ersichtlich ist. Es bezeichne (2, 1, 1; 0) eine derartige Verteilung, daß von solchen vier Karten zwei in einer Hand und die beiden übrigen je in einer Hand sitzen, ferner (3, 0, 0; 1), daß von solchen vier Karten drei in einer Hand sitzen, während die vierte im Skat liegt. Alle neun denkbaren Verteilungsarten lassen sich dann kurz so darstellen:

(4, 0, 0; 0), (3, 1, 0; 0), (2, 2, 0; 0), (2, 1, 1; 0),
(3, 0, 0; 1), (2, 1, 0; 1), (1, 1, 1; 1),
(2, 0, 0; 2), (1, 1, 0; 2).

Die Wahrscheinlichkeit für jede dieser neun Verteilungsarten zeigt die folgende Tabelle.

C. Tabelle für die Verteilung der Wenzel unter alle Spieler.

Verteilung	Nenner stets: $32_{10} \cdot 22_{10} \cdot 12_{10}$; Zähler	Wahrscheinlichkeit	Prozentzahl
a) (4, 0, 0; 0)...	$3 \cdot 4_4 \cdot 28_6 \cdot 22_{10} \cdot 12_{10}$	$\frac{63}{3596}$	1,8
b) (3, 1, 0; 0)...	$6 \cdot 4_3 \cdot 28_7 \cdot 21_9 \cdot 12_{10}$	$\frac{180}{899}$	20,0
c) (2, 2, 0; 0)...	$3 \cdot 4_2 \cdot 28_8 \cdot 20_8 \cdot 12_{10}$	$\frac{1215}{7192}$	16,9
d) (2, 1, 1; 0)...	$3 \cdot 4_2 \cdot 2_1 \cdot 28_8 \cdot 20_9 \cdot 11_9$	$\frac{675}{1798}$	37,5
e) (3, 0, 0; 1)...	$3 \cdot 4_3 \cdot 28_7 \cdot 21_{10} \cdot 11_{10}$	$\frac{18}{899}$	2,0
f) (2, 1, 0; 1)...	$6 \cdot 4_2 \cdot 2_1 \cdot 28_8 \cdot 20_9 \cdot 11_{10}$	$\frac{135}{899}$	15,0
g) (1, 1, 1; 1)...	$4_1 \cdot 3_1 \cdot 2_1 \cdot 28_9 \cdot 19_9 \cdot 10_9$	$\frac{50}{899}$	5,6
h) (2, 0, 0; 2)...	$3 \cdot 4_2 \cdot 28_8 \cdot 20_{10}$	$\frac{27}{7192}$	0,4
i) (1, 1, 0; 2)...	$3 \cdot 4_1 \cdot 3_1 \cdot 28_9 \cdot 19_9$	$\frac{15}{1798}$	0,8

Aus dieser Tabelle folgt unter anderm: Unter allen neun Verteilungsarten kommt am häufigsten die vor, daß von den vier Karten zwei in einer Hand und die beiden andern je in einer Hand sitzen, und zwar sind durchschnittlich unter acht Spielen immer drei von dieser Art. Aus der Summe von a), b), c), e), f), h), i) entnehmen wir, daß in etwa 57 Prozent aller Spiele mindestens ein Spieler gar keine Wenzel hat. Aus der Addition von e), f), g), h), i) geht ferner von neuem das schon in § 4 gefundene Resultat hervor, daß in fast 24 Prozent aller Spiele mindestens ein Wenzel liegt. Endlich ergiebt die Summe von b), c), f), i), daß in fast 53 Prozent aller Spiele ein Spieler kein Daus und jeder der beiden andern mindestens ein Daus hat. Die Zahlen der obigen Tabelle unterscheiden nicht, welcher gerade von den drei Spielern so oder soviel von den 4 Karten hat. Doch kann man die Wahrscheinlichkeit, daß gerade ein bestimmter Spieler eine gewisse Anzahl Karten von bestimmter Art hat, während die andern Spieler die übrigen besitzen, aus jenen Zahlen leicht durch Division entnehmen. Z. B. geht aus d) dadurch, daß man 37,5 durch drei dividiert, hervor, daß in 12,5 Prozent aller Spiele ich gerade 2 Wenzel und die beiden übrigen Spieler jeder einen haben. Noch weiter hat man zu dividieren, wenn auch die Farbe der Wenzel vorgeschrieben ist. So drückt 12,5 : 2 oder 6,2 Proz. die Wahrscheinlichkeit aus, daß ich gerade den ältesten Wenzel und noch einen Wenzel habe, während jeder der beiden übrigen Spieler einen der beiden andern Wenzel hat, ferner 12,5 : 6 oder 2,1 Prozent die Wahrscheinlichkeit, daß ich gerade den ersten und zweiten Wenzel habe, während jeder der beiden übrigen Spieler einen der beiden andern hat, endlich 12,5 : 12 oder 1,0 Prozent die Wahrscheinlichkeit, daß ich gerade den ersten und zweiten Wenzel, der rechts von mir sitzende Spieler den dritten und der links sitzende den vierten Wenzel hat.

In derselben Weise, wie eben die Verteilung von vier gleichwertigen Karten unter alle Spieler behandelt ist, könnte man auch die Verteilung der sieben Karten gleicher Farbe behandeln. Doch dürfte diese Aufgabe, bei der 20 Fälle unterschieden werden müßten, weniger Interesse darbieten. Wir schließen daher die Erörterungen über die Verteilung der 32 Karten, um im nächsten Abschnitt die für die Theorie des Skatspiels wichtigeren Aufgaben zu lösen, welche sich auf die Verteilung derjenigen 22 Karten beziehen, die Jemand bei Anfang des Spiels nicht in seiner Hand vorfindet.

Abschnitt III.

Die Verteilung der 22 Karten, die Jemand nicht erhalten hat, unter die beiden übrigen Spieler und den Skat.

§ 8.

Verteilung der nicht in meiner Hand befindlichen Wenzel.

Wenn ein Skatspieler seine zehn Karten erhalten hat, so wird es ihm für die Art, wie er zu spielen hat, wichtig sein, sich ein Urteil über die Verteilung der übrigen 22 Karten zu verschaffen. Freilich kann er Bestimmtes darüber nicht wissen, und nur bisweilen kann er aus der Art, wie gereizt wurde, sich ein ungefähres Urteil bilden. Deshalb wird es ihm wichtig sein, zu erfahren, welche Verteilungsarten der übrigen 22 Karten am wahrscheinlichsten sind, d. h. am häufigsten vorkommen müssen, und überdies den Grad dieser Häufigkeit in bestimmten Zahlen ausgedrückt zu sehen, die immerhin zuverlässiger sind als das Urteil, das er aus der Erfahrung, d. h. aus dem Irrtümern unterworfenen Gedächtnisse schöpft. Zunächst wollen wir die Verteilung der Wenzel erörtern, die ein Spieler nicht erhalten hat. Ist derselbe in der beneidenswerthen Lage, alle vier Wenzel erhalten zu haben, so ist er zugleich allem Nachdenken, wie wohl die Wenzel verteilt sind, überhoben, da er mit 100 Prozent Wahrscheinlichkeit, d. h. mit Gewißheit anzunehmen hat, daß keiner der anderen Spieler einen hat. Wir haben daher nur vier Hauptfälle zu erledigen, nämlich: er habe in die Hand bekommen a) 3, b) 2, c) 1, d) keinen Wenzel. Der besseren Uebersicht wegen führen wir für die Art der Verteilung der bei den übrigen Spielern und im Skat befindlichen Wenzel eine Bezeichnungsweise ein, die der im § 7 eingeführten entspricht und aus folgenden Beispielen erkennbar ist. Im Falle c) bezeichne (2, 0; 1), daß von den drei übrigen Wenzeln zwei in einer Hand sitzen und einer im Skat liegt; im Falle d) bezeichne (2, 2; 0), daß jeder von den beiden anderen Spielern zwei Wenzel hat. Hiernach wird die folgende Tabelle verständlich sein, wo wieder für diejenigen Leser, welche in die Ableitungsweise der Prozentzahlen eindringen wollen, der Weg der Berechnung mit angegeben ist.

D. Tabelle für die Verteilung der Wenzel, die ich nicht selbst habe.

Ich habe in der Hand	Verteilung der übrigen Wenzel	Zum Nenner $22_{10} \cdot 12_{10}$ gehört als Zähler	Wahrscheinlichkeit	Prozentzahlen
a) 3 Wenzel	α) (1, 0; 0)	$2 \cdot 21_9 \cdot 12_{10}$	$\frac{10}{11}$	90,9
	β) (0, 0; 1)	$21_{10} \cdot 11_{10}$	$\frac{1}{11}$	9,1
b) 2 Wenzel	α) (2, 0; 0)	$2 \cdot 20_8 \cdot 12_{10}$	$\frac{30}{77}$	43,3
	β) (1, 1; 0)	$2_1 \cdot 20_9 \cdot 11_9$	$\frac{100}{231}$	39,0
	γ) (1, 0; 1)	$2 \cdot 2_1 \cdot 20_9 \cdot 11_{10}$	$\frac{40}{231}$	17,3
	δ) (0, 0; 2)	20_{10}	$\frac{1}{231}$	0,4

c) 1 Wenzel	α) (3, 0; 0)	$2 \cdot 19_7 \cdot 12_{10}$	$\frac{12}{77}$	15,6
	β) (2, 1; 0)	$2 \cdot 3_2 \cdot 19_8 \cdot 11_9$	$\frac{45}{77}$	58,5
	γ) (2, 0; 1)	$2 \cdot 3_2 \cdot 19_8 \cdot 11_{10}$	$\frac{9}{77}$	11,7
	δ) (1, 1; 1)	$3_1 \cdot 2_1 \cdot 19_9 \cdot 10_9$	$\frac{10}{77}$	13,0
	ε) (1, 0; 2)	$2 \cdot 3_1 \cdot 19_9$	$\frac{1}{77}$	1,3
d) keinen Wenzel	α) (4, 0; 0)	$2 \cdot 18_8 \cdot 12_{10}$	$\frac{12}{209}$	5,7
	β) (3, 1; 0)	$2 \cdot 4_3 \cdot 18_7 \cdot 11_9$	$\frac{480}{1463}$	32,8
	γ) (2, 2; 0)	$4_2 \cdot 18_8 \cdot 10_8$	$\frac{405}{1463}$	27,7
	δ) (3, 0; 1)	$2 \cdot 4_3 \cdot 18_7 \cdot 11_{10}$	$\frac{96}{1463}$	6,6
	ε) (2, 1; 1	$2 \cdot 4_2 \cdot 2_1 \cdot 18_8 \cdot 10_9$	$\frac{360}{1463}$	24,6
	ζ) (2, 0; 2)	$2 \cdot 4_2 \cdot 18_8$	$\frac{18}{1463}$	1,2
	η) (1, 1; 2)	$4_1 \cdot 3_1 \cdot 18_9$	$\frac{20}{1463}$	1,4

Aus den berechneten Prozentzahlen lassen sich mancherlei Folgerungen ziehen, von denen wir einige hier übersichtlich zusammenstellen:

E. Schlüsse aus Tabelle D.

Prozentzahl der Fälle,	Falls ich in der Hand habe:			
	a) 3 W.	b) 2 W.	c) 1 W.	keinen W.
1) wo 2 Wenzel im Skat liegen	0	0,4	1,3	2,6
2) wo mindestens ein Wenzel liegt	9,1	17,7	26,0	33,8
3) wo mindestens einer der beiden anderen keinen Wenzel hat .	100	61,0	28,6	13,5
4) wo jeder der beiden anderen mindestens einen Wenzel hat. .	0	39,0	71,5	86,5
5) wo mindestens zwei Wenzel in einer Hand sitzen	0	43,3	85,5	98,6

Hiernach ist z. B. die Frage, ob Jemand, der spielt und zwei Wenzel hat, falls kein Wenzel liegt, eher annehmen darf, daß die beiden anderen Wenzel verteilt sind, als daß sie in einer Hand sitzen, dahin entschieden, daß es wahrscheinlicher ist, sie sitzen in einer Hand gegen den Spieler, und zwar verhält sich die Zahl der Fälle, wo letzteres stattfindet, zur Zahl der Fälle, wo die beiden Wenzel verteilt sitzen, wie 43,3 zu 39,0, d. h. wie etwa 10 zu 9. Ferner bemerke man, daß in $\frac{1}{3}$ aller Fälle, wo man keinen Wenzel in der Hand hat, einer im Skat liegt, ein Resultat, das vielleicht manche Spieler, die keinen Wenzel, aber eine gute Handkarte haben, noch mehr ermutigen wird, in den Skat zu steigen.

Was in diesem Paragraphen über die Verteilung der vier Wenzel erörtert ist, gilt natürlich auch für die Verteilung von irgend vier gleichwertigen Karten, z. B. den vier Däusern.

§ 9.

Verteilung der nicht in meiner Hand befindlichen Karten von einer der vier Farben.

Wenn ich in meinen zehn Karten von einer gewissen Farbe das Daus und die Zehn, aber sonst keine Karte vorfinde, so muß mir daran liegen, ein ziffermäßig begründetes Urtheil darüber zu erhalten, mit wieviel Wahrscheinlichkeit ich darauf rechnen kann, daß jeder der beiden andern Spieler diese Farbe zweimal bedient. Es ergiebt sich, daß dieser mir günstige Fall in 100 Fällen durchschnittlich 56 bis 57 mal eintrifft, und daß ich daher noch immer eher annehmen darf, auf Daus und Zehn werde von beiden Seiten bedient, als daß ich das Stechen zu fürchten hätte; freilich muß ich die Wahrscheinlichkeit als geringer ansehen, wenn ich aus dem Reizen ersehen konnte, daß einer der beiden andern Spieler Solo in dieser Farbe spielen wollte. Soeben war vorausgesetzt, daß ich von einer Farbe nichts weiter als das Daus und die Zehn hätte. Wenn ich aber von dieser Farbe außer Daus und Zehn noch eine Karte habe, so sinkt die Wahrscheinlichkeit, daß auf Daus und auf Zehn beide Mitspieler bedienen, sehr beträchtlich herab, nämlich auf 27 bis 28 Prozent. Diese und ähnliche Fragen über die Verteilung der 7 Karten einer und derselben Farbe erledigt die folgende Tabelle, in welcher die Verteilungsarten, ebenso wie in § 8 abgekürzt bezeichnet sind. Es bezeichnet z. B., falls ich von der Farbe nur eine Karte habe, bei den andern Spielern und im Skat also 6 vorhanden sind, (3, 2; 1) diejenige Verteilung, bei welcher von den beiden übrigen Spielern der eine 3, der andere 2 hat, während eine Karte dieser Farbe im Skat liegt. Die Wahrscheinlichkeitsbrüche sind für alle Unterfälle eines Hauptfalls immer auf denselben Nenner gebracht, und dann sind die zugehörigen Zähler angegeben. Prozentzahlen sind erst in einer folgenden Tabelle angegeben, welche gewisse Schlüsse enthält, die aus der Haupttabelle hervorgehen.

F. Tabellen für die Verteilung derjenigen Karten einer Farbe, die ich nicht selbst habe.

Ich habe von einer Farbe	Verteilung sonst	Zähler des Wahrscheinlichkeits-Bruches
a) 6 Karten (Nenner: 11)	α) (1, 0; 0)	10
	β) (0, 0; 1)	1
b) 5 Karten (Nenner: 231)	α) (2, 0; 0)	90
	β) (1, 1; 0)	100
	γ) (1, 0; 1)	40
	δ) (0, 0; 2)	1
c) 4 Karten (Nenner: 77)	α) (3, 0; 0)	12
	β) (2, 1; 0)	45
	γ) (2, 0; 1)	9
	δ) (1, 1; 1)	10
	ε) (1, 0; 2)	1

Ich habe von einer Farbe	Verteilung sonst	Zähler des Wahrscheinlichkeits-Bruches
d) 3 Karten (Nenner: 1463)	α) (4, 0; 0)	84
	β) (3, 1; 0)	480
	γ) (2, 2; 0)	405
	δ) (3, 0; 1)	96
	ε) (2, 1; 1)	360
	ζ) (2, 0; 2)	18
	η) (1, 1; 2)	20
e) 2 Karten (Nenner: 4389)	α) (5, 0; 0)	84
	β) (4, 1; 0)	700
	γ) (3, 2; 0)	1800
	δ) (4, 0; 1)	140
	ε) (3, 1; 1)	800
	ζ) (2, 2; 1)	675
	η) (3, 0; 2)	40
	ϑ) (2, 1; 2)	150

Ich habe von einer Farbe	Verteilung sonst	Zähler des Wahrscheinlichkeits-Bruches
f) 1 Karte (Nenner: 24871)	α) (6, 0; 0)	140
	β) (5, 1; 0)	1680
	γ) (4, 2; 0)	6300
	δ) (3, 3; 0)	4800
	ε) (5, 0; 1)	336
	ζ) (4, 1; 1)	2800
	η) (3, 2; 1)	7200
	ϑ) (4, 0; 2)	140
	ι) (3, 1; 2)	800
	ϰ) (2, 2; 2)	675

Ich habe von einer Farbe	Verteilung sonst	Zähler des Wahrscheinlichkeits-Bruches
g) keine Karte (Nenner: 7106)	α) (7, 0; 0)	10
	β) (6, 1; 0)	175
	γ) (5, 2; 0)	945
	δ) (4, 3; 0)	2100
	ε) (6, 0; 1)	35
	ζ) (5, 1; 1)	420
	η) (4, 2; 1)	1575
	ϑ) (3, 3; 1)	1200
	ι) (5, 0; 2)	21
	$\varkappa$) (4, 1; 2)	175
	λ) (3, 2; 2)	450

Aus den in der Tabelle F enthaltenen Wahrscheinlichkeitsbrüchen lassen sich unter anderm folgende für die Art der Verwertung meiner zehn Karten wichtige Schlüsse ziehen.

G. Schlüsse aus Tabelle F.

Prozentzahl der Fälle, wo von einer Farbe	Falls ich von derselben Farbe in der Hand habe:						
	a) 6 K.	b) 5 K.	c) 4 K.	d) 3 K.	e) 2 K.	f) 1 K.	g) keine K.
1) mindestens eine Karte im Skat liegt	9,1	17,7	26,0	33,8	41,1	48,1	54,5
2) zwei Karten im Skat liegen	0	0,4	1,3	2,6	4,3	6,5	9,1
3) Renonce bei mindestens einem meiner Mitspieler ist	100	56,7	28,6	13,5	6,0	2,5	0,9
4) jeder Mitspieler mindestens eine Karte hat	0	43,3	71,4	86,5	94,0	97,5	99,1
5) jeder Mitspieler mindestens zwei Karten hat	0	0	0	27,7	56,4	76,3	88,2
6) jeder Mitspieler mindestens drei Karten hat	0	0	0	0	0	19,3	46,4

§ 10.

Prüfung von einigen sonstigen Fragen.

Die Tabellen in § 8 und § 9 reichen für viele Fälle aus, in denen mir daran liegen muß, die Verteilungswahrscheinlichkeiten der nicht in meiner Hand befindlichen 22 Karten kennen zu lernen, um daraus einen Anhalt für die Art, wie ich am besten zu spielen habe, zu gewinnen. Habe ich z. B. von einer Farbe das Daus und dieses dreimal besetzt, so entnehme ich aus der in Tabelle G mit 4) c) bezeichneten Zahl 71,4, daß ich mit fast $\frac{3}{4}$ Wahrscheinlichkeit darauf rechnen kann, daß beide Gegner bedienen werden, falls ich dieses Daus ausspiele. Habe ich es aber viermal besetzt, so entnehme ich aus der Zahl 43,3 in G) 4) b), daß ich darauf viel weniger rechnen kann, indem es öfter vorkommen muß, daß nicht bedient wird, als daß bedient wird. Um zu zeigen, wie in ähnlicher Weise die Wahrscheinlichkeiten auch dann berechnet werden können, wenn schon ein oder mehr Stiche gemacht sind, und wie überhaupt spezielle im § 8 und § 9 nicht berücksichtigte Fälle zu behandeln sind, besprechen wir noch die folgenden Beispiele.

Ich habe von einer Farbe nur Daus und Zehn. Auf das Daus wurde mir von beiden Seiten bedient, und es fragt sich nun, wieviel Chancen ich habe, daß auch meine Zehn durchgeht. Da außer meinen Karten noch 20 im Spiel sind, die sich unter die beiden Mitspieler und den Skat zu 9, 9 und 2 vertheilen, so ist $20_9 \cdot 11_9$ oder $\frac{20!}{9!\ 9!\ 2!}$ die Zahl der möglichen Fälle. Von diesen sind Treffer erstens diejenigen, wo von der betreffenden Farbe der eine Mitspieler zwei Karten, der andere eine Karte hat, zweitens auch diejenigen, wo jeder nur 1 Karte hat und die dritte im Skat liegt. Demgemäß erhalte ich, da noch 17 Karten außer jener Farbe im Spiel sind: $2 \cdot 3_2 \cdot 17_7 \cdot 10_8 + 3_1 \cdot 2_1 \cdot 17_8 \cdot 9_8$. Dividire ich diese Trefferzahl durch die angegebene Zahl der möglichen Fälle, so erhalte ich $\frac{27}{38}$, d. h. 71,1 für die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Ich werde daher darauf, daß auch auf Zehn bedient wird, etwa ebenso rechnen können, wie ich bei einem dreifach besetzten Daus darauf rechnen konnte, daß auf das Daus bedient wird. Wenn ich aber außer Daus und Zehn noch eine dritte Karte von derselben Farbe habe, so erhalte ich in ähnlicher Weise wie oben nur $\frac{81}{190}$ oder 42,6 Prozent für die Wahrscheinlichkeit, daß, nachdem auf das Daus bedient ist, auch noch auf die Zehn bedient wird.

Zweitens nehmen wir an, daß ein Spieler mitten im Spiele, nachdem fünf Stiche gemacht sind, eine Farbe hoch anspielen möchte, von der er weiß, daß nur noch zwei kleine Karten bei den Gegnern oder im Skat vorhanden sein können. Er weiß ferner, daß dort auch noch zwei Trümpfe sitzen, und möchte daraus ermitteln, wie viel Chancen er hat, den Stich zu behalten. Er behält ihn erstens in dem Falle, wo jeder der beiden Gegner von der Farbe noch eine Karte hat, zweitens aber auch in jedem Falle, wo von den beiden Gegnern einer die Farbe hat und der andere weder die Farbe noch auch Trumpf hat. Als Wahrscheinlichkeiten ergeben sich für den ersten Fall $\frac{25}{66}$, für den zweiten Fall $\frac{25}{198}$, so daß der Spieler mit $\frac{100}{198}$ oder 50,5 Prozent Wahrscheinlichkeit den Stich behält. Er hat also ungefähr ebenso viel Chancen, den Stich zu gewinnen, wie ihn zu verlieren.

Wenn ein Gegenspieler eine blanke Zehn hat, so wird ihm daran liegen, zu erfahren, ob sein Helfer oder der Spieler das gleichfarbige Daus hat. Hier kann ihm aber auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung nichts verrathen. Denn sie ergiebt natürlich für beide Fälle gleiche Wahrscheinlichkeit, nämlich $\frac{5}{11}$ oder 45,5 Prozent. Die restierenden $\frac{1}{11}$ oder 9,1 Prozent geben die Wahrscheinlichkeit, daß das betreffende Daus im Skat liegt. Da auch im letzteren Falle die ausgespielte Zehn, falls der Spieler noch bedienen kann, den beiden Gegenspielern zufällt, so ergiebt sich 54,6 für die Wahrscheinlichkeit, daß die blanke Zehn nicht gefangen wird.

Es ist schon vorgekommen, daß ein Eicheln-Solo mit sieben Matadoren dadurch verloren ging, daß der Spieler in den drei übrigen Farben je eine kleine Karte hatte, und bei den Gegenspielern in jeder dieser drei Farben Daus und Zehn verteilt saßen, so daß die letztern auf 63 kamen. Für die Wahrscheinlichkeit, daß Jemand, der ein Eicheln-Solo mit sieben Matadoren und drei kleinen Faussen in Grün, Rot und Schellen spielt, dieses Spiel auf die genannte Weise verliert, ergiebt sich $\frac{1920}{24871}$ oder 7,7 Prozent, d. h. unter 13 Malen durchschnittlich 1 Mal.

§ 11.

Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das Nullspiel.

Die im Abschnitt I erörterten Methoden ermöglichen es auch, die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, mit welcher der Spieler eines Nullo von seinen Gegnern wegen einer Farbe gefaßt wird, von der er gewisse Karten, z. B. nur die Sieben und die Zehn, in der Hand hat, falls weder der Spieler noch die Gegner in dieser Farbe vorher abwerfen können. Da aber die zu behandelnden Aufgaben dieser Gattung sehr mannigfaltig sind, so hat der Verfasser vorläufig auf Vollständigkeit verzichtet und legt hier die Lösung nur von einigen Wahrscheinlichkeits-Aufgaben des Nullspiels vor. Hat der Spieler von einer Farbe nur die Sieben, so muß ihm dieselbe natürlich abgenommen werden, gleichviel wie die übrigen

Karten bei den Gegnern verteilt sind. Hat der Spieler aber die Acht blank, so kann er gefaßt werden, falls der eine der Gegner die Sieben hat und der andere gar keine Karte von der betreffenden Farbe besitzt. Letzterer kann also, da von den drei andern Farben 15 nicht in der Hand des Spielers sitzen, 15_{10} Gruppen von 10 Karten haben. Ferner darf von den 12 Karten, die weder der letztgenannte Gegenspieler noch der Spieler haben, die Sieben der betreffenden Farbe nicht im Skat liegen, damit es möglich wird, daß das Null wegen dieser Farbe verloren geht. Es sind also dafür $15_{10} \cdot 11_2$ zutreffende Fälle vorhanden, während $22_{10} \cdot 12_2$ Fälle überhaupt möglich sind. Daraus ergiebt sich $\frac{5}{646}$ oder 0,8 Prozent für die Wahrscheinlichkeit, daß ein Nullspieler durch eine blanke Acht gefaßt wird. Bedeutend größer wird diese Wahrscheinlichkeit, wie jeder Skatspieler auch aus Erfahrung weiß, wenn der Nullspieler statt einer blanken Acht eine blanke Neun hat. Denn dann ist er nicht blos in den Fällen faßbar, wo der eine Gegenspieler in dieser Farbe Renonce hat und der andere Gegenspieler die Sieben oder die Acht oder beide hat, sondern auch in den zahlreichen Fällen, wo der eine Gegenspieler die Sieben, der Andere die Acht hat. Berücksichtigt man alle diese Fälle genau, so erhält man $\frac{65965}{149226}$ oder 44,2 Prozent für die Wahrscheinlichkeit, daß ein Nullspieler durch eine blanke Neun gefaßt wird. Komplizierter werden die Lösungen der entsprechenden Aufgaben, falls der Nullspieler zwei oder noch mehr Karten einer Farbe besitzt. Wir besprechen daher von diesen Aufgaben nur noch die einfachste und wichtigste, nämlich die Berechnung der erfahrungsmäßig geringen Wahrscheinlichkeit, in einer Farbe gefaßt zu werden, von der man nur die Sieben und die Neun hat. Dabei unterscheiden wir zwei Spielweisen, ob nämlich der Nullspieler die Sieben oder die Neun zuerst zieht. Spielt er die Neun zuerst, so kann er nur gefaßt werden, wenn der eine Gegenspieler die Acht hat und der andere die Farbe gar nicht hat. Letzterer kann daher, da 16 Karten aus den drei andern Farben nicht in der Hand des Spielers sitzen, 16_{10} Karten-Gruppierungen haben. Von den 12 Karten, die weder dieser Gegenspieler noch der Spieler besitzen, darf die Acht nicht im Skat liegen, so daß noch 11_2 Karten-Paare den Skat bilden könnten. Hieraus ergiebt sich $\frac{20}{969}$ oder 2,1 Prozent für die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Wenn aber der Nullspieler die Sieben zuerst zieht, so ist er außer bei der eben besprochenen Verteilung noch dann faßbar, wenn der eine Gegenspieler die Acht und der andere eine, aber auch nur eine Karte der betreffenden Farbe hat. Dann kann der letztere nämlich diese eine Karte auf die ausgespielte Sieben zugeben und hat nachher Renoncen, wenn der Spieler die Neun geben muß, da der andere Gegenspieler seine Acht ausspielte. Bei dieser Spielweise kommen zu den $2 . 16_{10} . 11_2$

Treffern des vorigen Falls noch $2 \cdot 5_1 \cdot 16_9 \cdot 11_2$ Treffer hinzu, wodurch die Wahrscheinlichkeit, daß der Nullspieler gefaßt wird, auf $\frac{1140}{6783}$, d. h. auf 16,8 Prozent anwächst. Hiernach ist es auch in dem Falle, wo von der Farbe, in welcher ein Nullspieler nur Sieben und Neun hat, von den Gegnern nicht abgeworfen wird, sehr viel gefährlicher, die Sieben vor der Neun zu ziehen, als umgekehrt zu verfahren.* Die eben behandelten und noch mehrere andere Aufgaben, welche die Wahrscheinlichkeit, im Nullspiel gefaßt zu werden, betreffen, enthält die nebenstehende Tabelle.

Von den Zahlen dieser Tabelle dürften die in 15) und 16) überraschend sein. Während also der Besitz der fünf Karten von Acht bis Ober in einer Farbe sehr gefährlich ist, ist der Besitz der Karten von Acht bis König viel weniger bedenklich und birgt nicht viel mehr Gefahren, als der Besitz einer blanken Neun, immer vorausgesetzt, daß, bis diese Farbe gespielt wird, weder der Spieler noch die Gegner Gelegenheit hatten, in ihr abzuwerfen.

---

* Hierdurch ist eine bekannte Regel für das Nullspiel (in Buhle's inhaltreichem Skatbuch Nr. 114) durch genaue Zahlen bewiesen.

H. Tabelle für das Nullspiel.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Nullspieler in einer Farbe gefaßt wird, von der er nur hat:	beträgt in Prozenten:
1) Die Sieben	0,0
2) Die Acht	0,8
3) Die Neun	44,2
4) Die Zehn	72,4
5) Den Wenzel	87,4
6) Den Ober	94,9
7) Den König	98,5
8) Das Daus	100
9) Die Sieben und die Neun, falls er die Neun zuerst zieht	2,1
10) Die Sieben und die Neun, falls er die Sieben zuerst zieht	16,8
11) Die Sieben und die Zehn	45,7
12) Acht und Neun	16,8
13) Acht, Neun, Zehn	29,6
14) Acht, Neun, Zehn, Wenzel	48,2
15) Acht, Neun, Zehn, Wenzel, Ober .	62,7
16) Acht, Neun, Zehn, Wenzel, Ober, König	47,6
17) Acht, Neun, Zehn, Wenzel, Ober, König, Daus (falls er diese Farbe nicht selbst ausspielt)	90,9

Druck von J. F. Richter in Hamburg.

Skat